

ソリトン理論の非可換空間への拡張とその応用

名古屋大学	濱中 真志
派遣期間	2005年8月16日～2006年8月15日
研究機関	Mathematical Institute, University of Oxford, 24-29 St Giles', Oxford, OX1 3LB, UK
研究指導者	Professor Lionel J. Mason

研究の目的・背景

場の理論の非可換空間への拡張は、単なる一般化ではなく、物理としても数理論物理としても非常に面白いものを含んでいる。特に、非可換空間上のゲージ場の理論は、背景磁場中のゲージ場の理論と等価であり、量子ホール効果の分野などで古くから様々な応用がなされてきた。さらに非可換空間では特異点の解消が一般に起こり、新しい物理的対象が現れる。

これまでは主に、インスタントン・モノポールといったゲージ理論における可積分方程式の非可換化が研究されてきた。私は、これを KdV 方程式といった、より低次元の可積分方程式、ソリトン方程式にも適用し、新しい物理的対象を調べ、磁場中の物理系への応用を議論する。一般に非可換方程式は無限階の微分方程式として記述されるため、それが可積分だというのは数理物理的にも非常に興味深い。その起源を解明するために佐藤理論、ツイスター理論の非可換版を構築し、その幾何学的側面も詳しく調べる。さらに対応する物理的状況を明らかにし、非可換ソリトンの解析から様々な応用を試みる。

研究方法

上記計画に基づき、研究指導者の Mason 教授と議論を重ね、ソリトン理論の非可換空間への拡張とその物理学・可積分系への応用を推し進めた。研究方向は主に以下の 2 つである：

- (i) 佐藤理論の非可換空間への拡張
- (ii) ツイスター理論・Ward 予想の非可換空間への拡張

佐藤理論は、(低次元の) ソリトン方程式の最も包括的かつ壮大な理論として知られており、多重ソリトンの厳密解の構成や無限個の保存量の導出だけでなく、背後にある無限次元の対称性などが全て明らかにされる。この理論の非可換空間への拡張により、可積分性の起源や幾何学的背景が明らかにされると期待される。

ツイスター理論は 4 次元反自己双対(Anti-Self-Dual=ASD) Yang-Mills (YM) 方程式の可積分性を記述する最も本質的な枠組みである。Ward 予想の主張は「低次元の可積分方程式は ASDYM 方程式の(次元)還元によって(ほとんど)全て得られるであろう。」というものであり、可換空間では経験的に正しいことが知られている。(Mason と Woodhouse の著書にその全貌が体系的にまとめられている。) Yang-Mills 方程式の非可換化は背景磁場の導入という物理的意味を持ち、ASDYM 方程式の非可換化は、弦理論における D0-D4 ブレイン系に見事な対応を持つ。したがって、Ward 予想の非可換化は低次元非可換可積分方程式に物理的解釈(弦理論的解釈)を与える上で極めて重要であり、そのツイスター理論による解釈は佐藤理論とは別の角度から可積分性の幾何学的起源を与える。

研究結果・考察

(i) 佐藤理論の非可換空間への拡張

派遣期間中は、非可換行列式の種類である **quasi-determinants** を用いた多重ソリトンの厳密解の解析に重点を置き、漸近的振る舞いなどを調べた。時空の非可換性がソリトン散乱における位相のずれに影響を与える可能性についてはすでに議論されていたが、その定量的評価を具体的に行うことに成功した。また非可換 **KP** 階層の厳密解を他の非可換階層(非可換トロイダル **GD** 階層, 非可換戸田階層など)に対して拡張した。これらの成果を論文[2]として公表した。

(ii) ツイスター理論・Ward 予想の非可換空間への拡張

派遣期間中は、Ward 予想の非可換化に取り組み、非可換 **KdV** 方程式, **KP** 方程式だけでなく、ほとんど全ての主要な非可換可積分方程式が非可換 **ASDYM** 方程式から(次元)還元によって得られることを示した[1]。これにより、数年前戸田晃一氏(富山県立大)と提唱した非可換 **Ward** 予想は、可換空間と同程度に成り立つことが示された。今後、この非可換 **Ward** 予想の具体例を通して、厳密解の解析などから、対応する弦理論へのさまざまな応用が期待される。

(iii) その他の成果

上記の成果を英国の各大学のセミナーなどで発表し、多くの専門家と質疑応答を行った[3]-[8] (派遣期間後の成果発表: [9]-[20])。特にグラスゴー大学の **Strachan** 氏からは、2005年10月のセミナー[7]の後、非可換 **KdV** 方程式とある種の可換方程式との等価性について、一通の手紙を頂いた。これは非可換 **KdV** 方程式に対する **Seiberg-Witten** マップを与えていると予想されるが、同時に2次元量子重力との接点を示唆しており、極めて興味深い。可換側への対応が分かれば、物理的解釈が明確に与えられるだけでなく、非可換空間上での可積分系の基礎付けも与えられると期待される。これについては今後考察を深めていくつもりである。

さらに, Strachan 氏から招待された 2006 年 6 月のグラスゴー大学での Visitors' Programme in Integrable Systems [4]において, Gilson 氏, Nimmo 氏, 太田泰広氏との議論により, quasi-determinants を用いた厳密解の起源が Darboux 変換の視点から明らかになった. これが契機となり, 佐藤理論の非可換空間への拡張などを共同で研究していくことになり, 現在も研究交流が続いている.

公表論文

- [1] Masashi Hamanaka,
"Noncommutative Ward's Conjecture and Integrable Systems,"
Nuclear Physics B741 (2006) 368-389.
- [2] Masashi Hamanaka,
"Notes on Exact Multi-Soliton Solutions of Noncommutative Integrable Hierarchies,"
Journal of High Energy Physics 02, 094 (2007) 1-16.

口頭発表 (国際会議招待講演)

- [3] Masashi Hamanaka,
"Noncommutative Ward's conjecture and integrable systems,"
13th Meeting of the North British Mathematical Physics Seminar,
Department of Mathematical Sciences, University of Durham,
November 5, 2005.
- [4] Masashi Hamanaka, "Noncommutative Hierarchies,"
Visitors' Programme in Integrable Systems,
Department of Mathematics, University of Glasgow, June 6, 2006.

口頭発表 (セミナー講演)

- [5] Masashi Hamanaka,
"Towards Noncommutative Integrable Systems and Soliton Theories,"
Mathematical Physics Seminar,
Department of Mathematics, University of York, October 24, 2005.
- [6] Masashi Hamanaka,
"Noncommutative Solitons and Integrable Systems,"
Edinburgh Mathematical Physics Group Seminar,
Department of Mathematics, Heriot-Watt University, October 27, 2005.
- [7] Masashi Hamanaka,
"Noncommutative Solitons and Integrable Systems,"
Geometry, Integrable Systems and Topology Seminar,
Department of Mathematics, University of Glasgow, October 31, 2005.
- [8] Masashi Hamanaka,
"Noncommutative Ward's Conjecture and Integrable Systems,"
Mathematical Physics Seminar,
Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics (DAMTP),
University of Cambridge, November 29, 2005.

ポスター発表 (国際会議, 派遣期間後, 2006 年度のみ)

- [9] Masashi Hamanaka,
"Towards Noncommutative Twistor Programme,"
Noncommutative Geometry and Physics,
Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, UK,
September 4–5, 2006 .

[10] Masashi Hamanaka,
"Noncommutative Solitons and Integrable Systems,"
Trends in Noncommutative Geometry,
Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, UK,
December 18–22, 2006.

口頭発表 (セミナー発表, 派遣期間後, 2006 年度のみ)

[11a] Masashi Hamanaka,
"Noncommutative Solitons and Integrable Systems,"
Joint seminar in Pure & Applied Mathematics,
University of Kent, UK, October 30, 2006.

[12] Masashi Hamanaka,
"Noncommutative Ward's Conjecture and Integrable Systems,"
Relativity Seminar, Mathematical Institutes,
University of Oxford, UK, November 14, 2006.

[13] Masashi Hamanaka,
"Noncommutative Solitons and Integrable Systems,"
Algebra Seminar, University of Warwick, UK, February 7, 2007.

[14] Masashi Hamanaka,
"Integrable Aspects of Noncommutative Anti-Self-Dual Yang-Mills
Equations,"
Integrable Systems Seminars, University of Glasgow, UK,
February 13, 2007.

[15] Masashi Hamanaka,
"Backlund transformations for Noncommutative Integrable Systems,"
Special Seminar, Max Planck Institute for
Dynamics and Self-Organization, Gottingen, Germany,
February 22, 2007.

[16] Masashi Hamanaka,
"Noncommutative Solitons and Quasideterminants,"
Theoretical Physics Seminar, University of Hanover,
Germany, February 28, 2007.

口頭発表 (国内学会一般講演, 派遣期間後, 2006 年度のみ)

[17] 浜中 真志
"非可換 Ward 予想とその応用,"
日本物理学会 分科会, 首都大学東京, 2007 年 3 月 26 日.

[18] 浜中 真志
"非可換ソリトン方程式の厳密解,"
日本物理学会 分科会, 首都大学東京, 2007 年 3 月 26 日.

[19] 浜中 真志
"非可換 Ward 予想の検証とツイスター幾何学,"
日本数学会 年会, 埼玉大, 2007 年 3 月 28 日.

[20] 浜中 真志
"非可換ソリトンの厳密解について,"
日本数学会 年会, 埼玉大, 2007 年 3 月 29 日.