超流動体と超伝導体における巨視的量子コヒーレンスと素励起の理論的研究

Theoretical Study of Quantum Coherence and Elementary Excitations in Superfluids and Superconductors

（日本物理学会推薦）

代表研究者　北海道大学　　北　孝文　　Hokkaido University　　Takafumi KITA

We have derived exact renormalization-group equations for the n-point vertices (n=0,1,2,⋯) of interacting single-component Bose-Einstein condensates so as to satisfy Goldstone's theorem I, which yields the Hugenholtz-Pines relation $\Sigma(0)-\mu=\Delta(0)$ as the lowest-order identity. Using it, it has been found that the anomalous self-energy $\Delta(0)$ vanishes below d_c=4 (d_c=3) dimensions at finite temperatures (zero temperature), contrary to the Bogoliubov theory predicting a finite ``sound-wave" velocity $v_s \propto [\Delta(0)]^{1/2} > 0$. It has also been shown that the one-particle density matrix $\rho^{(1)}(r)$ for $d<d_c$ dimensions approaches the off-diagonal-long-range-order value N_0/V asymptotically as $1/r^{d-2+\eta}$ with an extra exponent η. Thus, the interacting Bose-Einstein condensates are subject to long-range fluctuations similar to those at the second-order transition point. The anomalous exponent η at finite temperatures has been predicted to behave for $d=4-\varepsilon$ dimensions ($0<\varepsilon\ll1$) as $\eta=0.181\varepsilon^2$. The change of the prefactor 0.181 from the value 0.02 at the transition point of the O(2) symmetric ϕ^4 model has been attributed to the emergence of three-point vertices and the anomalous Green's function when N_0 acquires a finite value.

研究目的

自発的対称性の破れに関するゴールドストーンの定理 [1,2] によると，ボーズ・アインシュタイン凝縮相には，励起エネルギーがゼロから連続的に立ち上がる励起モードが存在するはずである．このモードは，広く一般に，長波長で音波の分散関係を持つボゴリューボフ・モード [3] であると考えられてきた [4-8]．しかし，弱結合理論であるボゴリューボフ理論を出発点として相互作用に関する摂動展開を行うと，赤外発散のため計算が破綻し，意味のある結果が得られない [9,10]．そのため，ボーズ・アインシュタイン凝縮相の相関効果に関しては，微視的計算・理解ができない状況が 70 年以上にわたって続いてきた．

ある時，ふと，「この赤外発散は，二次相転移における平均場近似からの摂動展開に現れる赤外発散と同様に，物理的に本質的な意味・帰結を持つのではないか？」と思い至った．そして，この着想に基づき，BEC 相の励起スペクトルを微視的に解明することを目指した．

ボーズ・アインシュタイン凝縮（Bose-Einstein condensation，略して BEC）相は，同種ボーズ粒子系の低温で実現する相で，1925 年にアインシュタインにより理論的に予言された．その顕著な特徴の一つは，純粋な量子効果により，相互作用がなくても転移が起こりうる点にある．1995 年に理想ボーズ気体に近い系が原子気体で実現され，その後，実験・理論両面における BEC 研究の奔流が生じた．その中で，特に，相互作用がある系での BEC が，巨視的コヒーレンスと超流動性の発現をもたらすことも明瞭になった． BEC は，その他にも，液体 ^{4}He の極低温での超流動性やレーザー発振とも関連があることが知られている．この相互作用する BEC 相，特に一様 BEC 相の理論的記述が本研究の目的である．

相互作用のない「理想ボーズ気体」の熱力学的性質は，理論的によく理解されている．具体的に，d 次元一様理想ボーズ気体($d\geq2$)を考えると，ある転移温度 T_0 で，系の化学ポテンシャル μ が最低一粒子状態（$\mathbf{k}=\mathbf{0}$； $\mathbf{k}$ は波数ベクトル）のエネルギー$\varepsilon_{\mathbf{k}}=0$

に下から到達し，その状態に巨視的な数の粒子が落ち込みはじめる．これが BEC 転移である．T_0 以下では $\mu=0$ が成立して化学ポテンシャルは変化せず，絶対零度ではすべての粒子が $\mathbf{k}=\mathbf{0}$ 状態を占有する．凝縮状態のグリーン関数 $G_0(\mathbf{k},i\omega_n)$は，松原周波数がゼロ($\omega_n=0$)の分枝で，$G_0(\mathbf{k},0)\propto k^{-2}$ のように波数の逆二乗に比例して発散する．これは，相対論的場の量子論で言うところの「マスレス(massless)」の振る舞いで，$\mu=0$ に由来する．

ここに斥力相互作用が加わるとどうなるか．場の量子論的手法を用いて，この問題を最初に微視的に考察したのがボゴリューボフ(1947 年)である [3]．具体的に，質量が m，スピンの大きさが 0 で，接触型ポテンシャル $g_0\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$により弱く斥力相互作用する一様ボーズ粒子系を考える($0<g_0\ll 1$)．ボゴリューボフ理論によると，励起エネルギーは，相互作用のない場合の自由粒子型 $\varepsilon_{\mathbf{k}}\propto k^2$ から，ボゴリューボフ励起 $E_{\mathbf{k}}=[\varepsilon_{\mathbf{k}}(\varepsilon_{\mathbf{k}}+2g_0n_0)]^{1/2}$ へと変化し，長波長で音波の分散関係 $E_{\mathbf{k}}\propto k$ を持つようになる．その音速 v_sは，相互作用定数 g_0 の平方根に比例すると予言される．この音波型分散関係は，ランダウの超流動 ^{4}He に関するフォノン気体の現象論 [11]，および，中性子非弾性散乱で観測されたフォノン-ロトン分散 [12] のフォノン部分を微視的に基礎づけたものとして，広く受け入れられてきた．

ボゴリューボフ理論 [3] は，相互作用を摂動的に取り込むアプローチにおける最低次の近似である．しかし，このボゴリューボフ理論を改良しようとすると，たちまち困難に遭遇する．まず，ボゴリューボフ理論から出発して，グリーン関数を用いて相関効果を摂動論的に取り込もうとすると，赤外発散が現れて，意味のある結果が得られない．また，ボゴリューボフ理論の熱力学的期待値に関して自己無撞着にすると，励起に非物理的なエネルギーギャップが現れる [9,10]．すなわち，超伝導状態などのフェルミ粒子系に適用されて大成功を収めた場の量子論的手法 [4] が，凝縮ボーズ粒子系における相関効果の定量的記述に関しては無力なのである．私自身も，自己無撞着な摂動展開の構築 [13-15] や変分的手法 [16] によるアプローチなどにより，この系の相関効果を含む微視的記述に長年取り組んできた．しかし，上記の困難を根本的に解決することはできなかった．そのような中で，近年，冒頭の着想を得た．言い換えると，「相互作用する BEC 相では，多体相関が本質的に重要であり，摂動論的アプローチは不適切ではないか」との問題意識である．

ボゴリューボフ理論からの摂動展開に現れる赤外発散は，対応するグリーン関数にその起源がある．具体的に，その正常成分 $G_{\mathrm{B}}(\mathbf{k},i\omega_n)$および異常成分 $F_{\mathrm{B}}(\mathbf{k},i\omega_n)$ともに，$\omega_n=0$ の分枝において，波数の逆二乗 k^{-2} に比例して発散することを確認できる．つまり，理想ボーズ気体のグリーン関数 $G_0(\mathbf{k},0)$と，長波長での振る舞いが同じなのである．

この k^{-2} の振る舞いは，また，二次相転移点直下における揺らぎについての平均場グリーン関数の振る舞いと同じである．そこでは，平均場理論からの摂動展開は，赤外発散により同様に破綻する．摂動的手法が無力なのである．実際，この赤外発散は，非物理的であり，「相互作用定数を励起端でゼロにする」という非摂動効果により，最終的に取り除かれる．それとともに，$k\to 0$ におけるグリーン関数の振る舞いが，$k^{-2+\eta}$ のように，異常次元 $\eta>0$ を伴った形へと変化することが知られている．そして，その過程を理論的に記述する非摂動的枠組みとして，繰り込み群の手法が発展してきた [17-20]．以上の思考の連鎖から，冒頭の着想に至り，BEC 相の低エネルギー励起を繰り込み群で調べる研究に着手した．

研究経過

研究の初期には，繰り込み群に関する教科書を読み返して復習することにかなりの時間を費やした．しかし，それら教科書の大部分は，二次相転移点近傍のみを記述するように定式化されているので，BEC 相には適用できないように思われた．その後，いろいろ探すうちに，Kopietz らによる汎関数繰り込み群の教科書「Introduction to the Functional Renormalization Group」[21,22]に行き当たった．この教科書も，応用例の大部分は相転移点近傍の振る舞いに限定されている．しかし，その定式化は，相転移点から離れた熱平衡状態にも有効であると思われた．実際，この本の最後の数章は，フェルミ粒子系への適用に割かれている．定式化の部分を読み進むうちに，BEC 相にも使えそうだとの感触を得て，この手法の体得に取り組んだ．

汎関数繰り込み群では，まず，微視的なハミルトニアン（あるいはユークリッド作用）の運動量部分に赤外カットオフΛを導入する．そして，Λを $d\Lambda$だけ減少させ，熱力学関数$\Gamma^{(0)}$と n 点バーテックス$\Gamma^{(n)}$

が従う微分方程式(＝繰り込み群の方程式)を導く．それらの微分方程式を$\Lambda=0$ まで解くことで，厳密な熱力学関数$\Gamma^{(0)}$と n 点バーテックス$\Gamma^{(n)}$が得られる．その利点は，微視的なハミルトニアンに基づいて，相転移点だけでなく秩序相も熱力学的性質まで含めて扱える点にあり，さらに，「スケール変換」，「繰り込み変換」，「半群」等の概念の導入も不要である．実際，繰り込み変換は，汎関数繰り込み群の視点からは，バーテックスに関する繰り込み群方程式を解くための近似法の一つとして位置づけられる．

この汎関数繰り込み群の手法を用いて，BEC 相での n 点バーテックス$\Gamma^{(n)}$ ($n=0,1,2,\cdots$)に対する繰り込み群の方程式の導出を試みた [23-25]．まず，基本量である「バーテックス」を，大分配関数のルジャンドル変換と外場に対するテイラー展開により，曖昧さなく厳密に定義することに成功した．かなり悩んだのは，場の演算子ψそのものの期待値$\Psi\equiv\langle\psi\rangle$が有限となる BEC 相で，この手続きをどのように行うかである．Kopietz らの扱い [21,22] では，大分配関数 $Z_{\rm G}$ の対数 $\ln Z_{\rm G}$ から運動量部分を差し引いた後，ルジャンドル変換を行なって有効作用が定義されている．しかし，そこから得られる繰り込み群の方程式では，熱平衡条件$\Gamma^{(1)}=0$ を必ずしも満たさないという難点があった．今回の導出では，$\ln Z_{\rm G}$ 自体にルジャンドル変換を施すことで，熱平衡条件$\Gamma^{(1)}=0$ を満足する方程式を得た [23]．

第二の要点は，繰り込み群の方程式がゴールドストーンの定理を自動的に満たすための条件を明快に示したことである [23]．「ゴールドストーンの定理」は，連続対称性が自発的に破れた系の励起に関する基本定理である．その証明には二つの異なるものがある [1,2]．第一の証明は，有効作用Γが期待値Ψの無限小変換に際して不変であることを用いる．一方，より良く知られた第二の証明では，場と``電荷"との交換子の期待値を利用する．第一の証明を応用し，大域的位相変換に際しての有効作用Γ_Λ の不変性から，隣接する$\Gamma^{(n)}$と$\Gamma^{(n+1)}$との間に恒等式が成立することを示すことができた．その最低次は，「BEC 相の一粒子励起はエネルギーゼロから連続的に立ち上がる（＝マスレスである)」と主張する「ヒューゲンホルツ-パインズの定理」[26] に他ならない．そして，上記の関係式を満たすようにパラメーター化した相互作用定数を用いることで，繰り込み群の方程式が，ゴールドストーンの定理を自動的に満足する解を持つことを示した [23]．この点が今回の定式化における大きな進歩であると考えている．実際，Kopietz らの導出した方程式 [21,22] は，BEC 相に適用されることはなかった．その理由は，BEC 転移により 3 点バーテックスや異常 2 点バーテックス等が新たに出現する中で，どのように繰り込み変数を選択するかの指針がなかったからであると思われる．一方，今回の導出では，明確に BEC 相を対象にして方程式を導出し，バーテックス間に成立する関係式を満たす必要性を明示した．このことにより，変数の数が劇的に減少し，BEC 相での繰り込みを，現実的かつ「ゴールドストーンの定理」を満たすように行える状況になった．

次に，導出した繰り込み群の方程式に基づいて，相互作用定数 g_Λの赤外カットオフ波数Λ依存性を調べた [23]．その結果，g_Λが，4 次元以下（有限温度）もしくは 3 次元以下（絶対零度）において，$\Lambda\to 0$ でゼロに近づくことを示した．これは，ボゴリューボフ理論の予言 [3]である「一粒子励起は長波長で音波の分散関係を持ち，その音速は（裸の）相互作用定数 g_0 の平方根に比例する」を覆す結果である．相互作用が励起端でゼロになるのであるから，ボゴリューボフ励起は厳密な意味では存在しない．この結論は，「BEC 相の素励起」に対する一般の理解を覆す結果で，受け入れ難く思われるかもしれない．しかし，絶対零度での結果は「ネポムニャシー恒等式」とも呼ばれ，すでに 1975 年に得られていた [27]．そして，後年の複数の研究 [28-31] でもその結果が再現されている．

第三に，有限温度における一粒子密度行列$\rho^{(1)}(r)$の長距離 $r\to\infty$での振る舞いが，臨界次元 $d_{\rm c}=4$ 以下において，$\rho^{(1)}(r)\to N_0/V+C/r^{d-2+\eta}$ のようになること，すなわち，異常次元 $\eta>0$ を伴って，非対角長距離秩序 [32,33] の値である凝縮粒子密度 N_0/V に近づくと予想した．ここで C は定数である．実際，二次相転移点直上でも，相互作用定数は励起端でゼロになる．それとともに，$k\to 0$ における揺らぎのグリーン関数の振る舞いが，$k^{-2+\eta}$ のように，異常次元 $\eta>0$ を伴ったより弱い発散へと変化する [17-21]．従って，相互作用定数が励起端で同じくゼロになった BEC 相においても，グリーン関数の $k\to 0$ での振る舞いに，異常次元の出現を予想するのは自然である．もし出現すれば，そのフーリエ変換である一粒子密度行列は，非対角長距離秩序を伴った上述の漸近的振る舞いを

することになる．この予想を確かめるために，臨界次元 d_c=4 直下においてηの値を評価することに取り組んだ[23,25]．その計算は，非常に長く煩わしいものであったが，最終的に，$\varepsilon \equiv 4-d$ を用いて，$\eta \approx 0.181\varepsilon^2$ と表せることを示した[25]．これは，ウィルソンとフィッシャーが 1972 年に切り開いた「ε展開」[34] の BEC 相への拡張と見なせる．しかし，ウィルソンとフィッシャーによる相転移点の表式 $\eta=0.02\varepsilon^2$ から変化している．その理由は，BEC 相において，3 点バーテックス $\Gamma^{(3)}$ と異常グリーン関数が有限になることに帰することができる．有限のηは，BEC 相の極低温における熱力学的性質に，種々の非解析性をもたらすことも予言できる[24]．

考察

BEC 相に対する厳密な繰り込み群の方程式を導いた[23]．この方程式は，ゴールドストーンの定理を自動的に満足するという大きな利点がある．この方程式を用いて相互作用定数 g_Λ のΛ（赤外カットオフ）依存性を調べ，g_Λ が，4 次元以下（有限温度）もしくは 3 次元以下（絶対零度）において，$\Lambda \to 0$ でゼロに近づくことを示した[23]．それらの次元以下では，長波長極限における励起モードの分散関係が非解析的になる．そして，有限温度における一粒子密度行列の長距離相関に，$\rho^{(1)}(r) \to N_0/V + C/r^{d-2+\eta}$ で表される異常次元 η が現れる．臨界次元直下の η は $\eta \approx 0.181\varepsilon^2$ のように振る舞う[25]．

BEC 相に関しても，繰り込み群を用いた先行研究は存在した[29-31]．しかし，それらの研究の主な関心は，「絶対零度においてネポムニャシー恒等式と音波の存在は両立するか？」に向けられた．従って，有限温度における g_Λ の $\Lambda \to 0$ での振る舞いや異常次元の出現の可能性は，これまで全く考察されてこなかった．新たに導出した繰り込み群の方程式を解いて得られた上記の内容は，BEC 相における素励起の研究に，新局面を切り開く結果であると考えている．

有限のηは，BEC 相の極低温における熱力学的性質に，種々の非解析性をもたらすことを予言できる[24]．実際，Greywall が 1978 年に測定した超流動 ^{4}He の比熱には，200mK 以下の温度において，T^3 則からの下方向への逸脱が観測されている[35]．しかし，当時は原因不明として片付けられた．この下方向への逸脱も，理論的に説明出来ると考えている．すなわち，今回の理論結果は，超流動 ^{4}He の極低温における熱力学的性質を精密に測定することで，検証が可能なのである．その正しさが確立されれば，BEC 相の素励起に関して，革新がもたらされるであろう．

超流動 ^{4}He の極低温における熱力学的性質の精密測定は，絶対値が小さくなるので非常な困難が予想される．しかし，上述のように顕著な非解析性を示す可能性があり，非常に挑戦的なテーマであることを強調しておく．

以上の研究結果は，BEC 相の一粒子励起（個別励起）に関する結果である．今後の理論的課題の一つは，一粒子励起と二粒子励起（集団励起）の関係を明らかにすることであると考えている．Gavoret と Nozières は，絶対零度における一粒子グリーン関数と二粒子グリーン関数の構造に関する解析を行い，「一粒子励起と二粒子励起の極は一致する」，及び，「一粒子励起は音波の分散関係を持ち，その音速は巨視的な音速に等しい」ことを主張した[9]．しかし，彼らの議論は，「一粒子励起スペクトルは $\mathbf{k}= \mathbf{0}$ で解析的である」および「摂動論の赤外発散は非物理的である」という二つの仮定に基づいている．今回の結果は，これらの仮定を否定するものであり，二つの励起の関係を再度調べる必要があると考えている．

参考文献

1. J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
2. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields II* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1996). 19.2 節参照
3. N. N. Bogoliubov, J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947).
4. A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, and I. M. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover, New York, 1975).
5. C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
6. A. Griffin, *Excitations in a Bose-Condensed Liquid* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
7. J. O. Andersen, Rev. Mod. Phys. **76** 599, (2004).
8. H. Watanabe and H. Murayama, Phys. Rev. Lett. **110**, 181601 (2013).
9. J. Gavoret and P. Nozières, Ann. Phys. **28**, 349 (1964).
10. P. C. Hohenberg and P. C. Martin, Ann. Phys. **34**,

291 (1965).
11. L. D. Landau, J. Phys. USSR **5**, 71 (1941); **11**, 91 (1947).
12. R. A. Cowley and A. D. B. Woods, Can. J. Phys. **49**, 177 (1971).
13. T. Kita, Phys. Rev. B **80**, 214502 (2009).
14. T. Kita, Phys. Rev. B **81**, 214513 (2010).
15. T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. 83, 064005 (2014).
16. T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **86**, 044003 (2017).
17. K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).
18. S. -K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena* (Reading, Mass., 1976).
19. D. J. Amit, *Field Theory, Renormalization Group, and Critical Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1984).
20. Z. Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford University Press, Oxford, 1996).
21. P. Kopietz, L. Bartosch, and F. Schütz, *Introduction to the Functional Renormalization Group* (Berlin, Springer, 2010).
22. F. Schütz and P. Kopietz, J. Phys. A {¥bf 39}, 8205 (2006).
23. T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **88**, 054003 (2019).
24. T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **88**, 085002 (2019).
25. T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **88**, 104003 (2019).
26. N. M. Hugenholtz and D. Pines, Phys. Rev. **116**, 489 (1959).
27. A. A. Nepomnyashchii and Yu. A. Nepomnyashchii, JETP Lett. **21**, 1 (1975).
28. V. N. Popov and A. V. Seredniakov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **77**, 377 (1979) [Sov. Phys. JETP **50**, 193 (1979)].
29. C. Castellani, C. D. Castro, F. Pistolesi, and G. C. Strinati, Phys. Rev. Lett. **78**, 1612 (1997).
30. N. Dupuis and K. Sengupta, Europhys. Lett. **80**, 50007 (2007).
31. A. Sinner, N. Hasselmann, and P. Kopietz, Phys. Rev. Lett. **102**, 120601 (2009); Phys. Rev. A **82**, 063632 (2010).
32. O. Penrose and L. Onsager, Phys. Rev. **104**, 576 (1956).
33. C. N. Yang, Rev. Mod. Phys. **34**, 694 (1962).
34. K. G. Wilson and M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).
35. D. S. Greywall, Phys. Rev. B **18**, 2127 (1978); **21**, 1329 (1979).

研究の発表

口頭発表

1. 北孝文 :「繰り込み群による BEC 相の低エネルギー励起の解析」, 日本物理学会第 74 回年次大会（九州大学，2019 年 3 月 14 日～17 日）.
2. T. Kita: 「A renormalization-group study of interacting Bose-Einstein condensates: Absence of the Bogoliubov mode below d_c=4 (T>0) and d_c=3 (T=0) dimensions」, Frontiers of Quantum and Mesoscopic Thermodynamics (Praque, Czech Republic, 14-20 July 2019).
3. 桐越研光, 北孝文:「汎関数繰り込み群による BEC 相の比熱計算」, 日本物理学会 2019 秋季大会（岐阜大学，2019 年 9 月 10 日～13 日）.

ポスター発表

1. T. Kita: 「A renormalization-group study of interacting Bose-Einstein condensates: Absence of the Bogoliubov mode below four (T>0) and three (T=0) dimensions」, International Conference on Quantum Fluids and Solids (Edmonton, Alberta, Canada, 7-13 August 2019).

誌上発表

1. T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **88**, 054003 (2019).
``A Renormalization-Group Study of Interacting Bose-Einstein Condensates: Absence of the Bogoliubov Mode below Four (T>0) and Three (T=0) Dimensions.''
2. T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **88**, 085002 (2019).
``Specific Heat of Superfluid ^{4}He: Why Does It Deviate from the T^3 Law at Low Temperatures?''
3. T. Kita, J. Phys. Soc. Jpn. **88**, 104003 (2019).
``A Renormalization-Group Study of Interacting Bose-Einstein Condensates: II Anomalous Dimension η for d ≲ 4 at Finite Temperatures.''
4. 北　孝文： 固体物理 **55**, 103 (2020).
「ボーズ-アインシュタイン凝縮相の繰り込み理論」